Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 2

Николай М. Николов

Съобщения:

1. Следващата лекция ще започне от 9:45 (петък, зала 229 на ФМИ) и ще продължи до 12:15 с почивка 11:00 - 11:15.

2. Пълните лекционни записки ще бъдат общо достъпни до третата лекция (включително).

1. Квантова статистика – продължение

Резюме на въведените предположения и структури до тук:

Предполагаме, че наблюдаемите величини във всяка физична теория образуват векторно пространство, което е вложено в една комплексна асоциативна $*$-алгебра $\mathcal{A}$.

Припомняме, че комплексна асоциативна $*$-алгебра $\mathcal{A}$ (complex associative $*$-algebra) е векторно пространство над комплексните числа, което е снабдено с допълнителна дву-местна операция наречена произведение, $A \cdot B \in \mathcal{A}$ $(A, B \in \mathcal{A})$, която е разделно линейна по всеки аргумент.
(т.е. $(\alpha A + \beta B) \cdot C = \alpha A \cdot C + \beta B \cdot C$ и $A \cdot (\alpha B + \beta C) = \alpha A \cdot B + \beta A \cdot C$, и казваме, че е билинейна операция); операцията е още асоциативна, т.е. изпълнява закона $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. До тук определихме понятието асоциативна алгебра $\mathcal{A}$. Тя става $*$-алгебра ако е снабдена още с едноместна операция

$*: \mathcal{A} \to \mathcal{A} : A \mapsto A^*$, такава че (за $\forall A, B \in \mathcal{A}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$):

($*$1) антилинейност: $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A + \bar{\beta} B$

($*$2) инволютивност: $(A^*)^* = A$;

($*$3) антиморфизъм (обръща произведението): $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

N. N.

11.10.13

Забележка Ако $\hat{1}$ е единица на $*$-алгебрата $\mathcal{A}$ то $\hat{1}^* = \hat{1}$ понеже $\hat{1}^* \cdot A = (A^* \cdot \hat{1})^* = A^{**} = A$ и $A \cdot \hat{1}^* = (\hat{1} \cdot A^*)^* = A^{**} = A$.

Продължавайки нашия постулат, ние приемаме, че един елемент A на $*$-алгебрата $\mathcal{A}$ съответства на наблюдаема тогава и само тогава когато е самоспрегнат (self-adjoint): $A = A^*$.

Забележки Ако $A = A^*$ и $B = B^*$ са две наблюдаеми, то по принцип тяхното произведение $A \cdot B$ в асоциативната алгебра $\mathcal{A}$ може и да не представя наблюдаема, тъй като $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* = B \cdot A \neq A \cdot B$. Когато $A \cdot B = B \cdot A$ казваме, че A и B комутират (commute) и това е следователно необходимото и достатъчно условие $A \cdot B$ да бъде отново наблюдаема. В края на тази лекция ще свържем условието за комутируемост и с релацията за съвместимост (едновременна измеримост) въведена в първата лекция.

Възможно е да възникне въпрос до колко необходимо е да се работи над комплексните а не над реалните числа. Един аргумент в полза на комплексните алгебри е, че даже в реални алгебри некомутативността би довела до наличие на несамоспрегнати елементи $C \neq C^*$. В този случай комплексните числа позволят да направим разлагане на самоспрегнати части: $C = A + iB$, където $A = \frac{1}{2}(A + A^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(A - A^*) = B^*$.

По-нататък, при зададена асоциативна $*$-алгебра $\mathcal{A}$ ние нарекохме състояние (state) върху нея всяка функция $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ която е

(s0) линейна (линеен функционал): $\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha\, \omega(A) + \beta\, \omega(B)$

(s1) положителеност: $\omega(A^* A) \geq 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$

(s1′) реалност: $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)} \quad (\forall A \in \mathcal{A})$

(s2) нормираност: $\omega(\hat{1}) = 1$ (където $\hat{1} \in \mathcal{A}$ - единица на $\mathcal{A}$)

Физическият смисъл: $\omega(A)$ = средна стойност на A в ω.

N. N.
11.10.13

Математически коментар: При известни допълнителни предположения от топологичен характер за асоциативната алгебра $\mathcal{Q}$ (например, $\mathcal{Q}$ е C^*-алгебра) условието (S1') става следствие от (S1).

Въведохме и операция над състояния: смес на състоянията ω_1 и ω_2 наричаме линейния функционал $\omega = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$ при $p_1, p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$. Непосредствено се проверяват (S1) - (S2).

Чисто състояние нарекохме състояние, което не може да се представи като нетривиална смес:

$$\text{чисто състояние} \underset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \omega = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 \text{ - смес} \\ \Longrightarrow \quad p_1 p_2 = 0 \end{array} \right.$$

Пример: Нека $\mathcal{Q} = M_n(\mathbb{C})$ - алгебрата на комплексни $n \times n$ матрици спрямо матричното умножение.

$$A^* = (\overline{A})^T \quad - \quad \text{ермитово спрягане.}$$

Елементите $A \in \mathcal{Q}$ действат като линейни оператори в $\mathbb{C}^n$, което от своя страна е пример за крайно-мерно Хилбертово пр-во (пълната дефиниция следва) спрямо ермитовото скаларно произведение

$$\text{за } \left. \begin{array}{l} \phi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \\ \psi = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n \end{array} \right\} : \langle \phi | \psi \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

Тогава е в сила: $\langle \phi | A\psi \rangle = \langle A^*\phi | \psi \rangle$.

Как се описват състоянията върху $M_n(\mathbb{C})$?

Теорема Състоянията в/у $M_n(\mathbb{C})$ са във взаимно еднозначно и обратимо съответствие с комплексни $n \times n$ - матрици $\rho = (\rho_{kl})$ такива, че:

(1) ρ е неотрицателна матрица: $\langle \phi | \rho\phi \rangle \geq 0 \quad (\forall \phi \in \mathbb{C}^n)$.

(2) имат следа 1: $\mathrm{Tr}\,\rho := \sum_{k=1}^{n} \rho_{kk} = 1$

Връзката между ω и ρ е: $\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$

Терминология: ρ се нарича матрица на плътността (density matrix).

Доказателството на това твърдение е извън рамките на този курс. От друга страна, това е несложно упражнение по линейна алгебра и затова ще приведем схема на доказателството:

Едно състояние ω върху $M_n(\mathbb{C})$ е линеен функционал и, както всяка линейна функция над векторно пространство, ω се определя еднозначно от стойностите си върху базис. От друга страна, като векторно пространство $M_n(\mathbb{C})$ е изоморфно на $\mathbb{C}^{n^2}$ и има базис

$$E_{jk} = \begin{array}{cc} & \quad k \\ j & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} E_{jk}.$$

Тогава ω се определя еднозначно от набора от числа

$$\rho_{jk} := \omega(E_{kj}) \quad (j, k = 1, \ldots, n) \text{ и}$$

$$\omega(A) = \omega\left(\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} E_{jk}\right) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}\, \omega(E_{jk}) = \sum_{j,k=1}^{n} \rho_{kj} A_{jk}$$

$$= \mathrm{Tr}(\rho A) \ (= \mathrm{Tr}(A\rho) \text{ - обърнете внимание!}).$$

Условието $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ следва автоматично от (s2). Условието $\langle \phi | \rho \phi \rangle \geq 0$ за $\forall \phi = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ следва ако се приложи (s1) за матрицата

$$C = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = A^* A \ \text{(защо?)}.$$

<u>Забележка</u> От ρ – неотрицателна матрица $\Rightarrow \rho = \rho^*$!
Ето защо в този случай условието (s1') е следствие от (s1).

Ще приведем без доказателство едно важно следствие (доказателството е отново упражнение по линейна алгебра).

<u>Следствие</u> ω е чисто състояние върху $M_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow$ представящата го матрица ρ има ранг 1, т.е.,

$$\rho = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$$ (защото е и самоспрегната).

Ако означим $\phi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, то

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A) \equiv \langle \phi | A \phi \rangle .$$

Такива $\phi \in \mathbb{C}^n$ се наричат *вектори на състоянието*.
От $\mathrm{Tr}\, \rho = \langle \phi | \phi \rangle = 1 \Rightarrow \phi$ – трябва да е единичен в-р.

<u>Забележка.</u> Ако $\phi' = e^{i\alpha}\phi$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ то ϕ' определя същото състояние:

$$\langle \phi' | A \phi' \rangle = \langle e^{i\alpha} \phi | A e^{i\alpha} \phi \rangle = \overline{e^{i\alpha}}\, e^{i\alpha} \langle \phi | A \phi \rangle = \langle \phi | A \phi \rangle .$$

виж свойствата на ермитовото скаларно произведение, които следват

Следователно, чистите състояния са във взаимно-еднозначно съответствие с "единичните лъчи" в $\mathbb{C}^n$, т.е. подмножествата от вида

$$\{ e^{i\alpha} \varphi \}_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad (\|\varphi\| \equiv \langle \phi | \phi \rangle^{1/2} = 1) .$$

(От своя страна, единичните лъчи пък са в 1 – 1 съответствие с едномерните подпространства.)

N. N.

11.10.13

Определение Пред-Хилбертово пространство (pre-Hilbert space) $\mathcal{H}$ е комплексно векторно пространство с ермитово скаларно произведение $\langle\phi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$ $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$, т.е., такова че $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall \phi, \psi \in \mathcal{H})$:

1) $\langle \alpha\phi + \beta\psi | \theta \rangle = \bar{\alpha}\langle\phi|\psi\rangle + \bar{\beta}\langle\psi|\theta\rangle$

2) $\langle\phi|\alpha\psi + \beta\theta\rangle = \alpha\langle\phi|\psi\rangle + \beta\langle\phi|\theta\rangle$

3) $\langle\phi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\phi\rangle}$

4) $\langle\phi|\phi\rangle \geq 0$, като $\langle\phi|\phi\rangle = 0 \Rightarrow \phi = 0$.

Забележка $\|\phi\| = \langle\phi|\phi\rangle^{1/2}$ превръща $\mathcal{H}$ в нормирано пространство (normed space). Когато $\mathcal{H}$ е пълно (complete) нормирано пространство, то се нарича Хилбертово пространство.

Твърдение. За всяко пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ множеството:

$$Op(\mathcal{H}) := \{A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е линеен оператор такъв, че } \exists \text{ линеен оператор } B : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ за който } \langle\phi|A\psi\rangle = \langle B\phi|\psi\rangle \text{ за } \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}\}.$$

е $*$-алгебра, в която произведението е композицията (операторното произведение) а спрягането се определя от условието:

$$\langle A^*\phi|\psi\rangle = \langle\phi|A\psi\rangle.$$

В случая когато $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$: $Op(\mathbb{C}^n) \equiv M_n(\mathbb{C})$.

Доказателство. Ако A и $B \in Op(\mathcal{H})$, то $\exists A^*$ и B^* съгласно условието в $Op(\mathcal{H})$. $\Rightarrow$ $\langle\phi|AB\psi\rangle = \langle A^*\phi|B\psi\rangle = \langle B^*A^*\phi|\psi\rangle$. Оттук, следва, че $Op(\mathcal{H})$ е алгебра спрямо операторното произведение, а също така и че $*$-операцията е антиморфизъм (условие $(*3)$).

N. N.
11.10.13

Обръщаме внимание, че A^* е еднозначно определен от условието $\langle A^*\phi | \psi \rangle = \langle \phi | A\psi \rangle$ $(\forall \phi, \psi \in \mathcal{H})$ тъй като ако $\langle B\phi | \psi \rangle = \langle \phi | A\psi \rangle$ то $\langle (A^* - B)\phi | \psi \rangle = 0$ $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ и в частност за $\psi = (A^* - B)\phi$ получаваме, че $\| (A^* - B)\phi \|^2 = \langle (A^* - B)\phi | (A^* - B)\phi \rangle = 0$, т.е. $(A^* - B)\phi = 0$ $(\forall \phi)$ и $\Rightarrow$ $A^* = B$. $\square$

<u>Математически коментар</u>. В случая когато $\mathcal{H}$ е произволно Хилбертово пространство, $Op(\mathcal{H})$ = алгебрата на всички ограничени оператори над $\mathcal{H}$. Това следва от две основни теореми на функционалния анализ: първо, A е затворен оператор, понеже допуска спрегнат (по условие), второ, A е ограничен, понеже е глобално определен затворен оператор (коментарът се отнася за студенти изучавали функционален анализ).

Следващото твърдение на Гелфанд-Наймарк-Сигал показва, че примера на $M_n(\mathbb{C})$ $(= Op(\mathbb{C}^n))$, който разгледахме отговаря в голяма степен на общата ситуация.

<u>Теорема (GNS)</u>: Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра, а ω е състояние над $\mathcal{A}$, то $\exists \mathcal{H}$ - пред Хилбертово пространство, вектор $\phi \in \mathcal{H}$ и линейно изображение $\pi : \mathcal{A} \to Op(\mathcal{H})$ такива, че $(\forall A, B \in \mathcal{A})$:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ \pi(A \cdot B) = \pi(A) \cdot \pi(B) \\ &(2)\ \pi(A^*) = \pi(A)^* \\ &(3)\ \pi(\hat{1}) = \hat{1} \end{aligned}\right\}$$ казваме, че π е морфизъм на $*$-алгебри с 1 или още, че π е представяне (в пред-Хилбертово пространство).

(4) $\omega(A) = \langle \phi | A\phi \rangle$

(5) $\{ A\phi \mid A \in \mathcal{A} \} = \mathcal{H}$ - казваме, че π е циклично представяне.

Доказателството на теоремата, макар и чисто алгебрично, е извън рамките на настоящия курс.

N. N.
11.10.13

Математематически коментари 1. Теоремата има допълнителна част гласяща, че тройката $(\mathcal{H}, \phi, \pi)$ е единствена "с точност до изоморфизъм".

2. В теоремата не се твърди, че π е изоморфизъм, нито дори че е инекция или сюрекция.

3. В тази теорема срещаме понятието представяне на алгебра, което е аналогично на (линейно) представяне на група и в частност, има аналогични операции и понятия за представяния, като пряка сума, приводимост, неприводимост. Доказва се например, че полученото представяне по GNS теоремата е неприводимо $\Leftrightarrow$ изходното състояние ω е чисто.

4. Във връзка с 3. още: една $*$-алгебра $\mathcal{Q}$ може да допуска нееквивалентни (неизоморфни) неприводими представяния, когато е безкрайно-мерна. Този математически феномен има физическа интерпретация: в статистическата физика се счита, че различните фази (фазови състояния) на една квантова термодинамична система се описват с нееквивалентни представяния на алгебрата на наблюдаемите величини. Нееквивалентност на представяния лежи и в основата на математическото описание на физически феномени като спонтанното нарушение на симетрията.

По-нататък ще предполагаме, че $\mathcal{Q} := Op(\mathcal{H})$, т.е. ще работим в (пред) Хилбертово пространство. Дори ще приемем за простота в началото, че $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Физически, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ означава, че нашата система е крайна в смисъл, че всяка наблюдаема може да приема само краен брой различни стойности. И всъщност, този брой $\leq n$, както ще видим след малко в тази лекция.

N. N.

11.10.13

<u>Коментар</u> Във връзка с илюстративния избор $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ ще отбележим, че в теоретичната физика е често срещан маниер да се работи с безкрайни суми като с крайни и дори с интеграли като с (Риманови) крайни суми. Тази математическа неточност е понякога отстранима и е по-скоро педагогичен похват. В КТП обаче такъв нестрог (макар и евристичен) подход много често остава без алтернативен строг подход. Така, КТП се явява математически незавършена теория и по-точно казано, до днес няма математематически завършена теория на взаимодействащи квантови полета във физически интересния случай на 3+1 пространство+времеви измерения. В тази връзка ще изтъкнем, че този проблем на математическата физика (в известна конкретизирана форма) е формулиран като един от милениум проблемите на Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, заедно с проблеми като хипотезата на Риман и хипотезата на Поанкаре (вече решена).

От друга страна, независимо че е матически незавършена, КТП се явява теорията дала най-точните предсказания потвърждавани някога на експеримент. А именно, това е предсказанието за така наречения аномален диполен магнитен момент на електрона, измерен и теоретично потвърден с точност до 12 значещи цифри!

Следват няколко физични интерпретации.

1. Кога една наблюдаема $A \in Op(\mathcal{H})$ има детерминирана стойност в дадено състояние?

Преди всичко, нека това е чисто състояние, тъй като тези състояния са максимално изчистени статистически. Нека $\phi \in \mathcal{H}$ е вектора на състояние ($\|\phi\| = 1$) и нека средната стойност на A в ϕ означим с $\langle A \rangle_\phi := \langle \phi | A\phi \rangle$. Да отбележим, че $\langle A \rangle_\phi$ е реално число:

$$\langle \phi | A\phi \rangle = \langle A^*\phi | \phi \rangle = \langle A\phi | \phi \rangle = \overline{\langle \phi | A\phi \rangle}.$$

Да въведем наблюдаемата $B = A - \langle A \rangle_\phi \hat{1} = B^*$, която има смисъл на отклонението на A от средната си стойност спрямо ϕ. Средната стойност на B^2 в ϕ, $\langle \phi | B^2 \phi \rangle$, се нарича средно квадратично отклонение на A в ϕ или още, дисперсия на A в ϕ. Именно нулирането на дисперсията на A в ϕ е статистическия критерий, че A има детерминирана стойност в ϕ или с други думи, че A приема почти сигурно една и съща стойност в ϕ. От друга страна,

$$\langle \phi | B^2\phi \rangle = \langle B^*\phi | B\phi \rangle = \langle B\phi | B\phi \rangle = \|B\phi\|^2 \geq 0$$

и следователно: A има детерминирана стойност в ϕ

$\iff \langle \phi | B^2 \phi \rangle = 0 \iff \|B\phi\| = 0 \iff B\phi = 0 \iff A\phi = \langle A \rangle_\phi \phi$

$\iff \phi$ е собствен вектор на A.

(Припомняне, че $\|\phi\| = 1$ понеже ϕ е вектор на състояние.)

Нещо повече, ако A е детерминирана в състоянието ϕ ($\iff \phi$ е собствен вектор на A), то стойността, която наблюдаемата A приема почти сигурно в ϕ е съответната собствена стойност на представящия самоспрегнат оператор A. Ние ще засилим този извод в следния:

Постулат Възможните стойности, които може да приема една наблюдаема A при измерване са собствените стойности на представящия A самоспрегнат оператор.
По-обща и точна формулировка: възможните стойности са тези и само тези числа, които лежат в спектъра на представящия самоспрегнат оператор. Спектралната теория на самоспрегнати оператори е основна тема във функционалния анализ, но излиза извън рамките на предполагания материал в този курс.

В примера $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ $(\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C}))$: всяка ермитова матрица A (т.е., $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = A$) се диагонализира в ортонормиран базис от собствени вектори $f_1, \dots, f_n$ ($\langle f_j | f_k \rangle = 0$ за $j \neq k$, $\|f_j\| = 1$). Това е една от основните теореми на линейната алгебра. Нека означим диагоналната форма, която приема матрицата A във базиса $f_1, \dots, f_n$ на $\mathbb{C}^n$:

$$A = \mathrm{diag}(\underbrace{a_1, \dots, a_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k})$$

еднакви собствени стойности

$$a_i \neq a_j \quad \text{при } i \neq j.$$

Допускайки известна неточност отново ще използваме буквата A акцентирайки по такъв начин на факта, че това е същия оператор и съответно, същата наблюдаема, но в друг ортонормиран базис.
Нека въведем и оператори $P_1, \dots, P_k$, които се представят във базиса $f_1, \dots, f_n$ с диагоналните матрици:

$$P_1 = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0),$$
$$P_2 = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0),$$
$$\dots$$
$$P_k = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 1),$$

където единиците са разположени последователно на местата в които A има еднакви собствени стойности.

N. N.
11.10.13

Операторите $P_1, \ldots, P_k$ са самоспрегнати, $P_j^* = P_j$, понеже се представят от ермитови матрици в ортонормиран базис. Освен това те изпълняват равенствата:

а) $P_j^2 = P_j$ т.е., идемпотентност
или още, P_j са проектори

б) заедно с условието $P_j^* = P_j$, P_j стават ортогонални проектори.

в) $P_j P_\ell = 0$ при $j \neq \ell$, т.е. $P_1, \ldots, P_k$ са взаимно ортогонални проектори.

г) $P_1 + \cdots + P_k = \hat{1}$, т.е., $P_1, \ldots, P_k$ формират разбиване на единицата.

д) $A P_j = a_j P_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ (за определеност полагаме $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$).

Ако означим с $\mathcal{H}_j = P_j \mathcal{H}$, подпространството на $\mathcal{H}$ върху което P_j проектира $(j = 1, \ldots, k)$, то $\mathcal{H}_j$ е собственото подпространство на A отговарящо на собствената стойност a_j. Именно това отразява Свойство д). Свойство в) се преформулира като взаимна ортогоналност на $\mathcal{H}_j$ и $\mathcal{H}_\ell$ при $j \neq \ell$ ($\mathcal{H}_j \perp \mathcal{H}_\ell$ и в частност, $\mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_\ell = \{0\}$). Свойство г) се преформулира като

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_k$, т.е. $\mathcal{H}$ се разбива в пряка сума на взаимно ортогонални собствени подпространства.

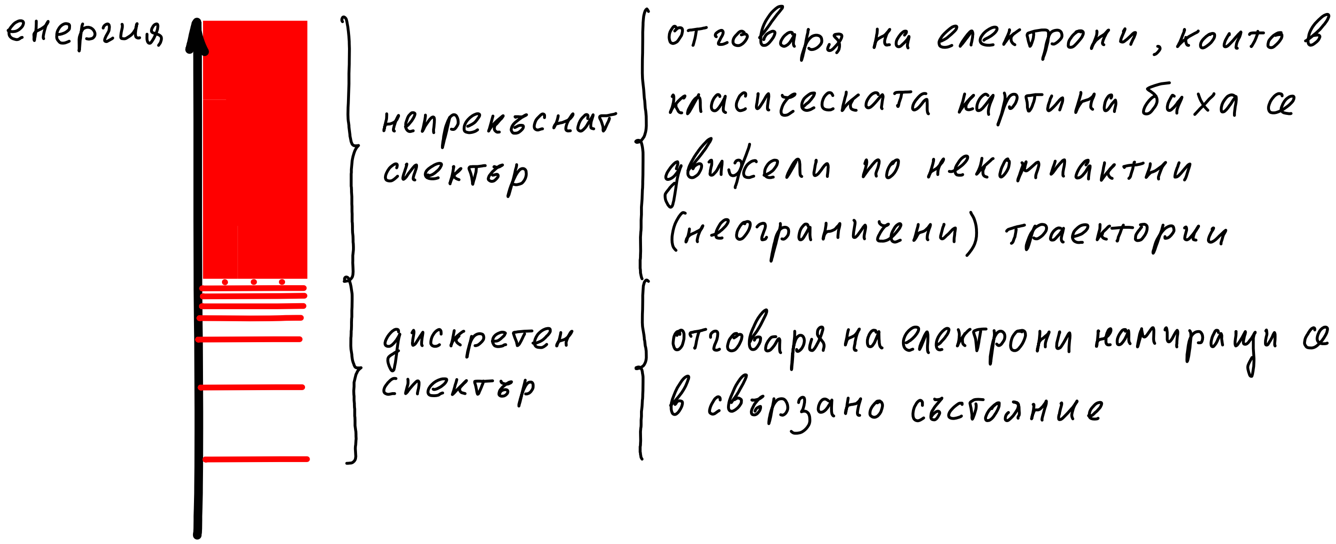
Съгласно полаганията ни получаваме още:

$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots + a_k P_k .$$

Това представяне на A за оператори $P_1, \ldots, P_k$ удовлетворяващи свойствата а) – д) по-горе се нарича спектрално разлагане (spectral decomposition) на оператора A, а P_j - спектрални проектори. Такова разлагане на A е единствено, съгласно неговата връзка с разлагането на A на собствени вектори и собствени стойности.

Коментари: 1.) Спектърът на един самоспрегнат оператор може да е дискретна редица от числа и по такъв начин принципно обяснява един от основните наблюдателни феномени - дискретните спектри на атомните и мулекулни спектри на излъчване - останали необясними в класическата физика.

2.) Във безкрайно мерни Хилбертови пространства един самоспрегнат оператор може да има освен дискретен спектър, състоящ се от собствени стойности, също и непрекъснат спетър, числата от който вече нямат пряк смисъл на собствени стойности. Типичен пример на спектъра на енергията на електрон във водороден атом е изобразен на следната фигура:



3.) Оператор в Хилбертово пространство изпълняващ равенството $\langle \phi | A \psi \rangle = \langle A\psi | \phi \rangle$ за $\forall\, \phi, \psi$ от дефиниционната област на A се наричат ермитови (още, симетрични). За неогранечени оператори това е съществено по-слабо условие от условието за самоспренатост, което е условие и върху дефиниционната област на спрегнатия оператор. Един ермитов оператор може да допуска различни продължения до самоспрегнат оператор (а може и да няма такива), и всяко продължение да има различен спектър, т.е., да описва различна физическа наблюдаема.

N. N.
11.10.13

4.) Така, в безкрайно мерни Хилбертови пространства множество наблюдаеми се описват с неограничени оператори. Физически, неограничеността на представящия оператор отговаря на на неограниченост на възможните стойности, които може да приема наблюдаемата. Типичен пример е оператора на енергията.

5.) Математически, работата с неограничени оператори в Хилбертови пространства се затруднява силно от обстоятелството, че те имат дефиниционни области, които са подпространства (обикновено навсякъде гъсти) в Хилбертовото пространство. Тези области за два неограничени оператора може да са толкова различни, че даже сумата на операторите да е единствено определена за нулевия вектор. В този случай алгебричната постановка с която започнахме нашата система от постулати на квантовата механика става принципно невъзможна. Математически, изходът от тази ситуация е да се стартира математическата постановка на теорията използвайки само ограничени наблюдаеми/оператори. Това има дори физически смисъл - в крайна сметка нашите измервателни прибори имат ограничена скала. Например, ние не измерваме точно енергията, а някакъв отрязък от енергията, което вече е ограничена наблюдаема. Самите неограничени наблюдаеми могат допълнително да се опишат с редици от ограничени наблюдаеми, които задават разширяващи се диапазони на измерване.

Преминаваме към следващата физическа интерпретация:

2. Квантови събития ще наричаме наблюдаеми, които могат да приемат само две стойности: 0 и 1, като стойността 1 отговаря на настъпване на събитието (а 0 – на не настъпването).

Нека отчетем факта на спектрално разложение

$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots$$

на всяка наблюдаема A на ортогонални проектори, при което $\{a_1, a_2, \ldots\}$ е множеството от стойности на A. Следователно, $\{a_1, a_2, \ldots\} = \{0, 1\}$ означава просто, че $A = P$ е ортогонален проектор.

И така, една наблюдаема P е квантово събитие $\Leftrightarrow$ P е ортогонален проектор (т.е., $P^2 = P$ и $P = P^*$).

В допълнение, чистите състояния при които квантовото събитие P настъпва почти сигурно са тези и само тези, чийто вектори на състоянието $\phi \in \mathcal{H}$ са собствени за P, $P\phi = 1.\phi$, т.е. ϕ лежи в подпространството $P\mathcal{H}$ върху което P проектира.

Отрицанието на събитието P е ортогоналния проектор $1-P$ и състоянията, при които това събитие настъпва почти сигурно лежат в ортогоналното допълнение на подпространството $P\mathcal{H}$.

Връщайки се пак към спектралното разложение

$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots$$

на произволна наблюдаема A ние можем да интерпретираме ортогоналните проектори $P_1, P_2, \ldots$ в това разложение (т.е., спектралните проектори на A) като квантови събития:

P_j е квантовото събитие при което A приема стойност a_j.

N. N.

11.10.13

Забележка Така, квантовите събития P са във взаимно еднозначно и обратимо съответствие със подпроствата $P\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}$ върху които ортогоналните проектори проектират. В елементарната теория на Хилбертови пространства се доказва, че такива подпространства на $\mathcal{H}$ могат да бъдат точно затворените линейни подпространства на $\mathcal{H}$.

3. Вероятността за настъпване на квантовото събитие P в състояние ω е равна на средната стойност на P в ω: действително, при измерване на P вероятността за настъпване на P се получава по закона за големите числа като средната честота на настъпване на P, т.е. средната стойност на P.

$\omega(P)$ = вероятността за настъпване на P в ω

4. Ако $A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots$ е спектралното разложение на наблюдаема A, то вероятността A да приеме стойност a_j в състояние ω = вероятността за настъпване на събитието P_j в ω = $\omega(P_j)$.

5. Наредба на кватовите събития. Квантова логика.

Нека P и Q са квантови събития ($\Rightarrow$ ортогонални проектори). Казваме, че събитието Q следва от събитието P (или още, че Q съдържа P), ако винаги при настъпването на P настъпва и Q. P настъпва почти сигурно в $\phi \Leftrightarrow \phi \in P\mathcal{H}$. Следователно от тук следва, че $\phi \in Q\mathcal{H}$, т.е.

от P следва Q $\Leftrightarrow$ $P\mathcal{H} \subseteq Q\mathcal{H}$, т.е. P проектира върху подпространство на пространството върху което Q проектира.

<u>Забележки</u>: 1.) Строго погледнато, в последната еквивалентност ние обосновахме единствено посоката "$\Rightarrow$", тъй като разсъждавахме само за състояния ϕ в които P настъпва почти сигурно, а не и за общи вектори на състояние. Пълното основание за горната еквивалентност може да се получи като следствие от проекционния постулат, който следва по-долу.

2.) Както отбелязахме в забележката в края на интерпретация 2 квантовите събития са във взаимно-еднозначно и обратимо съответствие със затворените подпространства на Хилбертовото пространство. При това наредбата на квантовите събития отговаря на наредбата на теоретико-множествено включване между съответстващите затворени подпространства. Множеството на всички затворени подпространства на едно Хилбертово пространство е изходния обект в едно силно актуално направление днес наречено квантова логика. Един от първите въвели и дискутирали тази структура е Биркхоф.

N. N.
11.10.13
 Преминаваме към поредната физическа интерпретация:

6. Елементарни квантови събития и връзката им с чисти състояния.

Съгласно наредбата въведена в предходната точка в множеството на всички квантови събития има най-малък елемент – нулевия оператор. Той разбира се отговаря на "невъзможното събитие".

Така, минималните ненулеви събития имат смисъла на елементарни квантови събития, т.е., това са събития, за които не съществуват по-малки от тях ненулеви събития.

Съгласно получената в точка 5 интерпретация минималните събития съответстват на минимални ненулеви подпространства на Хилбертовото пространство $\mathcal{H}$. А те са точно едномерните подпространства.

И така, P е елементарно квантово събитие $\Longleftrightarrow$ P е ортогонален проектор върху едномерно подпространство.

<u>Математическа забележка</u> Крайно-мерните подпространства на Хилбертово пространство (и в частност, едномерните) са винаги затворени.

Получихме, че елементарните квантови събития са във взаимно еднозначно и обратимо съответствие с едномерните подпространства на $\mathcal{H}$. От друга страна, във взаимно еднозначно и обратимо съответствие с едномерните подпространства са и чистите състояния.

Така, получаваме 1-1 съответствие между чистите състояния и елементарните квантови събития:

За $\forall$ елементарно квантово събитие P $\exists$ единствено чисто състояние в което P се случва почти сигурно: ако ϕ е вектора на състоянието, то $P\phi = \phi$ и $P\mathcal{H} = \mathbb{C}\phi$ – едномерното подпространство породено от ϕ.

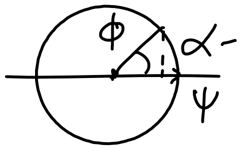
Получената връзка между чисти състояния и елементарни квантови събития е в основата на следващата физична интерпретация:

7. Нека ϕ и $\psi \in \mathcal{H}$ са единични вектори (т.е. вектори на състояние) и нека P и Q са съответстващите им елементарни квантови събития (т.е., $P\phi = \phi$, $Q\psi = \psi$ и по-точно P проектира върху ϕ, а Q върху ψ).

Вероятност за преход $\phi \mapsto \psi := \langle Q \rangle_\phi \equiv \langle \phi | Q \phi \rangle$
(средната стойност на Q в ϕ).

Ще я пресметнем: $Q\phi = \langle \psi | \phi \rangle \psi$ – факт!

(Аналогия от евклидовата геометрия: $Q\phi = (\cos\alpha) \cdot \phi$



α – ъгъл $\measuredangle(\phi, \psi)$

$\cos\alpha = \langle \psi | \varphi \rangle$.)

$$\Rightarrow \langle Q \rangle_\phi = \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \;\; \psi \rangle = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \equiv \langle P \rangle_\psi$$

= Вероятност за преход $\psi \mapsto \phi$ (симетричност!)

Вероятностите за преход са основни обекти за предсказание в КТП. Те се пресмятат посредством скаларните произведения $\langle \phi | \psi \rangle$, които носят името "амплитуди на прехода".

Да обърнем внимание, че тъй като $\|\phi\| = \|\psi\| = 1$, то

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \in [0, 1]$$

и може с пълно право да служи за вероятност.

Основание за предходната интерпретация дава следващия постулат наречен "проекционен постулат" на фон Нойман.

Постулат. Ако при измерване на една наблюдаема A имаща спектрално разложение $A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots$ сме получили стойност a_j, то непосредствено след измерването системата преминава със скок в смесено състояние описвано с матрицата:

$$\rho = \frac{P_j}{\mathrm{Tr}\, P_j} \qquad \left(\mathrm{Tr}\, P_j = \dim \left(P_j \mathcal{H} \right) \right),$$

където P_j е съответния спектрален проектор.

В частност, при настъпване на едно елементарно квантово събитие P системата преминава със скок в съответстващото му чисто състояние.

Забележки 1.) Делението на $\mathrm{Tr}\, P_j$ в дефиницията на ρ е свързано с условието за нормировка, $\mathrm{Tr}\, \rho = 1$, което получихме преди. (В случая когато $\mathrm{Tr}\, P_j = \infty$ този постулат се нуждае от допълнителна прецизировка.)

2.) По-физически, горния постулат може да се изкаже така: ако непосредствено след измерване на една наблюдаема A ние повторим измерването в **полученото резултантно състояние**, то ще измерим същата стойност и състоянието на системата няма да се измени при това повторно измерване.

3.) Току що написания постулат води до така наречения "квантов парадокс на Зенон": ако ние постоянно измерваме една величина, например, следим непрекъснато положението на една частица, то ще измерваме само една и съща стойност.

4.) Разбира се, когато експериментално се получат следи от елементарни частици те са цели линии, а не една точка на мястото на "замръзналата" частица. В действителност обаче, наблюдаваните следи не са "непрекъснати" линии, а са поредица от точки - поредица от детекции на частицата между които състоянието на частицата е еволюирало.

Приведения постулат ни дава възможност да получим критерий за това кога две наблюдаеми са едновременно измерими (или още, съвместими) - понятие което въведохме в първата лекция но във втората до момента то не играеше роля.

<u>Следствие</u>. Две наблюдаеми A и B са съвместими
$\Leftrightarrow$ $A \cdot B = B \cdot A$, т.е., комутират.

В права посока ($\Rightarrow$) ние аргументирахме това още в предходната лекция. Няма да привеждаме тук доказателство на това следствие от проекционния постулат, а ще го приемем като математическа интерпретация (определение) на физическото понятие за съвместимост.

С това приключваме нашия увод в квантовата статистика и ще преминем от следващата лекция към излагане на квантовата динамика.